

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФЕСТИВАЛЬ ЗОЛОТОЕ РУНО

8 класс. Алгебра и теория чисел—2. 08 июня 2010 года

1. Обозначим $N = 123 \dots 9101112 \dots 99$. В любом ли 189-значном числе можно поменять 188 цифр так, чтобы результат делился на N ?

2. У каждого из составных чисел n , $n + 100$ выписали наибольший делитель, отличный от самого числа. Оказалось, что выписанные делители равны. Найдите все возможные значения n .

3. На длинной полоске бумаги выписано число 4^{100} (в десятичной записи). Вася разрезал полоску на три, причем числа на образованных полосках не начинаются на 0. Могут ли эти три числа быть точными кубами?

4. Числа $x^3 - x$ и $x^4 - x$ — целые. Докажите, что и x целое.

5. Для каких натуральных m найдутся различные натуральные a , b такие, что $(ma + b)(mb + a)$ — степень простого?

6. На доске написано несколько натуральных чисел. Оказалось, что вместе с любыми двумя числами $a < b$ на доске написано и число $\text{НОК}(a, b)/(b - a)$. Докажите, что всего чисел на доске не более двух.

7. Докажите, что если для положительных рациональных x , y число $x + y + 1/x + 1/y$ — целое, то оно не делится на 3.